**PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ (PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC)**

HỆ THỐNG BÀI TẬP SỬ DỤNG TRONG CHUYÊN ĐỀ

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Tỉnh, thành phố | Năm học | Tỉnh, thành phố | Năm học |
| HSG Đống Đa | 2020-2021 | HSG Sơn Dương | 2020-2021 |
| HSG Gia Lâm | 2020-2021 | HSG Tân Kỳ | 2018-2019 |
| HSG Long Biên | 2020-2021 | HSG Ba Đình vòng 2 | 2020-2021 |
| HSG Nam Từ Liêm | 2020-2021 | HSG Vĩnh Lộc | 2020-2021 |
| HSG Ba Đình | 2020-2021 | HSG Anh Sơn | 2020-2021 |
| HSG Tây Hồ | 2020-2021 | HSG Hưng Hà | 2019-2020 |
| HSG Thanh Oai | 2020-2021 | HSG Thăng Bình | 2020-2021 |
| HSG Chương Mỹ | 2020-2021 | HSG Nghĩa Đàn Tỉnh vòng 2 | 2018-2019; 2020-2021 |
| HSG Mỹ Đức | 2020-2021 | HSG Tân Yên | 2020-2021 |
| HSG Ứng Hòa | 2020-2021 | HSG Tiên Lữ | 2020-2021 |
| HSG Cầy Giấy | 2020-2021 | HSG Yên Thành | 2020-2021 |
| HSG Thanh Oai vòng 2 | 2020-2021 | HSG Yên Định | 2020-2021 |
| HSG Quỳnh Phụ | 2020-2021 | HSG Sin Hồ | 2020-2021 |
| HSG Nam Sách | 2020-2021 | HSG Tân kì | 2020-2021 |
| HSG Nga Sơn | 2020-2021 |  |  |
| HSG Tỉnh Quảng Nam | 2020-2021 |  |  |
| HSG Tỉnh Nghệ An | 2020-2021 |  |  |
| HSG Tỉnh Hà Nam | 2020-2021 |  |  |
| HSG Tỉnh Bắc Ninh | 2019-2020 |  |  |
| HSG Tỉnh Hưng Yên | 2020-2021 |  |  |
| HSG Tỉnh Nam Định | 2020-2021 |  |  |
| HSG Tỉnh Đồng Tháp | 2020-2021 |  |  |
| HSG Tỉnh Đà Nẵng | 2020-2021 |  |  |
| HSG Tỉnh Bình Phước | 2020-2021 |  |  |
| HSG Tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu | 2020-2021 |  |  |
| HSG Tỉnh Gia Lai | 2020-2021 |  |  |
| HSG Tỉnh Bắc Giang | 2020-2021 |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

**I. Phương pháp nâng lên lũy thừa giải phương trình vô tỉ**

**Dạng 1: **

**Bài 1:**

**Giải phương trình sau **

**Lời giải**

Phương trình ****

Vậy nghiệm của phương trình là ****

**Bài 2:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Phương trình 

(phương trình vô nghiệm)

**Bài 3:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Phương trình 

(phương trình vô nghiệm)

**Bài 4:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Phương trình 

(phương trình vô nghiệm)

**Bài 5:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Phương trình





Vậy tập nghiệm của phương trình là 

**Bài 6:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Phương trình 



Vậy tập nghiệm của phương trình là 

**\*) Nhận xét:** Không nên đặt điều kiện  (điều kiện này phức tạp khó giải quyết).

**Dạng 2: **

**Bài 1:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Phương trình 

Vậy phương trình có tập nghiệm là 

**Bài 2:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Phương trình 



Vậy phương trình có tập nghiệm là 

**Dạng 3: **

**Bài 1:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Phương trình 



Vậy phương trình có tập nghiệm là 

**Bài 2:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Phương trình 

Vậy phương trình có tập nghiệm là 

**Bài 3:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Phương trình 

Vậy phương trình có tập nghiệm là 

**Bài 4:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Phương trình 

Vậy phương trình có tập nghiệm là 

**Bài 5:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Phương trình



Vậy phương trình có tập nghiệm là 

**Bài 6:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Phương trình 



Vậy phương trình có tập nghiệm là 

**Bài 7:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Phương trình 

Vậy phương trình có tập nghiệm là 

**Bài 8:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện 

Phương trình 



Vậy phương trình có tập nghiệm là 

**Bài 9:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện 

Phương trình





Vậy phương trình có tập nghiệm là 

**Bài 10:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện 

Ta có phương trình 



Vậy phương trình có nghiệm 

**Bài 11:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện: 

Nhân liên hợp với  ta có:



 (thỏa mãn).

**Bài 11:**

Giải các phương trình sau

a) b)



**Lời giải**

a. Phương trình tương đương với:



Kết luận là nghiệm của phương trình.



b. Điều kiện: . Bình phương 2 vế ta được:



.



Đối chiếu với điều kiện ta thấy chỉ có là nghiệm của phương trình.



**Bài 12:**

Giải các phương trình sau

a) b)



**Lời giải**

a. Điều kiện thỏa mãn với mọi *x*. Ta viết phương trình lại thành



và bình phương 2 vế rồi ta có



Kết luận .



b. Điều kiện: . Bình phương 2 vế phương trình ta thu được:



. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất .



**Dạng 4: **

**Bài 1:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Phương trình 

Vậy phương trình có tập nghiệm là 

**Bài 2:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Phương trình 

Vậy phương trình có tập nghiệm là 

**Bài 3:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Phương trình 



Vậy phương trình có tập nghiệm là 

**Dạng 5: **

**Cách giải:**

Bước 1: Tìm điều kiện xác định 

Bước 2: Bình phương hai vế của phương trình đưa về dạng 

Bước 3: Giải phương trình  và kết luận.

**Bài 1:** HSG Tân kì, năm học 2020 - 2021

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện 

Ta có 





 (thỏa mãn)

Vậy phương trình có tập nghiệm 

**Bài 2:** HSG Tam Dương, năm học 2020 - 2021

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện 

Ta có 





Đối chiếu với điều kiện xác định ta được nghiệm của phương trình là .

**Bài 3:** HSG Mỹ Đức, năm học 2020 - 2021

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện 

Ta có 









Vậy phương trình có nghiệm .

**Bài 4:** HSG Sơn Dương, năm học 2020 - 2021

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện 

Ta có 

 (thỏa mãn)

Vậy phương trình có tập nghiệm.

**Bài 5:** HSG Tỉnh Quảng Nam, năm học 2020 - 2021

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện 

Ta có 

Do  vô nghiệm nên phương trình (\*) tương đương với phương trình





+  (thỏa mãn điều kiện)

+ 

 (thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm 

**Bài 6:** HSG Tỉnh Nghệ An, năm học 2020 - 2021

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện 

Phương trình đã cho tương đương với 





, do 

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là .

**Bài 7:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện 

Phương trình 

 (thỏa mãn)

Vậy phương trình có tập nghiệm là 

**Bài 8:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện 

Phương trình 

 (thỏa mãn)

Vậy phương trình có tập nghiệm là 

**Bài 9:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện 

Phương trình 

 (thỏa mãn)

Vậy phương trình có tập nghiệm là 

**Bài 10:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện 

Phương trình 

 (thỏa mãn)

Vậy phương trình có tập nghiệm là 

**Bài 11:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện 

Phương trình



 (thỏa mãn)

Vậy phương trình có tập nghiệm là 

**\*) Cách khác:** 



**Bài 12:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện 

Phương trình 

 (thỏa mãn)

Vậy phương trình có tập nghiệm là 

**\*) Sai lầm:** 

Vì chưa xác định được dấu của .

**Bài 13:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện 

Phương trình 



Vậy phương trình có tập nghiệm là 

**Bài 14:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện 

Phương trình 

(do  hay )



Vậy phương trình có tập nghiệm là 

**Bài 15:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện 

Phương trình 





Vậy phương trình có tập nghiệm là 

**Bài 16:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện: 

Bình phương hai vế của phương trình ta được:







 (thỏa mãn)

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất 

**Bài 17:**

Giải các phương trình sau

a) 

b) 

**Lời giải**

a) Điều kiện: 

Ta có 





Với  bình phương hai vế của phương trình (\*) ta được:

 (không thỏa mãn)

Vậy phương trình vô nghiệm.

b) 

Điều kiện 

Bình phương hai vế ta được:









 vì 

 (thỏa mãn)

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất .

**Dạng 6: **

**Cách giải:**

Bước 1: Lũy thừa bậc ba hai vế của phương trình ta được



Bước 2: Biến đổi phương trình ta được 

Bước 3: Tiếp tục lũy thừa bậc ba hai vế ta được 

**Bài 1:** Giải các phương trình sau

a)  b) 

c)  d) 

**Lời giải**

a) Điều kiện 

Phương trình







Vậy phương trình có tập nghiệm là 

b) Điều kiện 

Phương trình 





Ta có (\*) vô nghiệm

Thay  vào thấy thỏa mãn điều kiện

Vậy phương trình có tập nghiệm là 

c) Điều kiện 

Phương trình 







Vậy phương trình có tập nghiệm 

d) Điều kiện 

Phương trình 

 (thỏa mãn)

Vậy phương trình có tập nghiệm 

**Bài 2:**

Giải phương trình 

**Lời giải**

Ta có 

Phương trình 









**\*) Nhận xét:** Với phương trình , trong đó 

Thì ta được về dạng 

**Bài 3:**

Giải phương trình 

**Lời giải**

Ta có 

 (thỏa mãn điều kiện).

**Dạng 7: Phương trình xuất hiện nhân tử chung dạng **

Cách giải: Ta có ****

**Bài 1:**

Giải phương trình 

**Lời giải**

Điều kiện ****

Ta có phương trình 

+) TH1:  (thỏa mãn)

+) TH2: 

Vậy phương trình có nghiệm ****

**Bài 2:**

Giải phương trình 

**Lời giải**

Điều kiện: ****

Ta có phương trình ****

****

Ta có 

Vậy phương trình có nghiệm ****

**Bài 3:**

Giải phương trình 

**Lời giải**

Điều kiện: 

Ta có phương trình 

+) Với  ta thấy thỏa mãn

+) Với , ta có phương trình 

Vì  phương trình vô nghiệm

+) Với , ta có phương trình 





Vậy phương trình có nghiệm .

**Bài 4:**

Giải các phương trình sau:

a) 

b) 

**Lời giải**

a) Điều kiện: 

Ta có 



Vậy phương trình có nghiệm 

b) Ta có 

Điều kiện: 

Ta thấy  là một nghiệm của phương trình

+) Nếu  phương trình (\*) trở thành 

 (thỏa mãn).

+) Nếu  phương trình trở thành 



Vậy tập nghiệm của phương trình là 

**Bài 5:**

Giải các phương trình sau:

a) 

b) 

**Lời giải**

a) Điều kiện: 

Phương trình biến đổi về dạng 



Giải (\*) ta được  (loại)

Vậy  là nghiệm duy nhất của phương trình.

b) 

Điều kiện: 

Ta có: 

Nhận thấy  là một nghiệm của phương trình

+) Nếu  phương trình (\*) trở thành



 (vô nghiệm) vì 

+) Nếu  phương trình (\*) trở thành: 

 (vô nghiệm) vì 

Vậy  là nghiệm duy nhất của phương trình.

**Bài 6:**

Giải các phương trình sau:

a)  b) 

**Lời giải**

a) Điều kiện: 

Phương trình biến đổi về dạng: 



b) Điều kiện: 

Phương trình biến đổi về

dạng 



**Bài 7:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện 

Ta có 



 (thỏa mãn).

**Bài 8:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Ta có 

Tập xác định 

+ Với  là một nghiệm của phương trình (1)

Vậy  là một nghiệm của (1)

+ Với 

 (thỏa mãn)

+ VỚi  (không thỏa mãn)

Vậy phương trình có hai nghiệm là .

**Bài 9:** Hà Nội, năm học 2011

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Ta có 





Vậy phương trình có hai ngiệm 

**Dạng 8: Phương pháp biến đổi xuất hiện bình phương**

Cách giải: Đối với dạng toán này, ta có 2 dạng cơ bản

Dạng 1: 

Dạng 2: Biến đổi về các tổng không âm

+) 

+) 

**Bài 1:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện: 

Nhân cả hai vế với , ta được:









Đặt 



**Bài 2:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện: 

Ta có phương trình 



Vậy phương trình có nghiệm 

**Bài 3:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện 

Ta có phương trình 

 (thỏa mãn)

**Bài 4:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện: 

Ta có phương trình 



 (vô lí)

Vậy phương trình vô nghiệm.

**Bài 5:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện 

Phương trình 

 (thỏa mãn)

Vậy phương trình có nghiệm 

**Bài 6:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện: 

Ta có 



 (thỏa mãn)

**Bài 7:** HSG Gia Lâm, năm học 2020 - 2021

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện: 

Ta có 

 (thỏa mãn điều kiện)

Vậy tập nghiệm của phương trình là 

**Bài 8:** HSG Tây Hồ, năm học 2020 - 2021

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện: 

Phương trình 



+) TH1: 

+) TH2: 



Vậy tập nghiệm của phương trình là 

**Bài 9:** HSG Ứng Hòa, năm học 2020 - 2021

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện 

Có 



Vậy phương trình có nghiệm duy nhất .

**Bài 10:** HSG Anh Sơn, năm học 2020 - 2021

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện 

Ta có 



Vì 

Do đó 

Vậy  là giá trị cần tìm.

**Bài 11:** HSG Tân Kỳ, năm học 2018 - 2019

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện 

Ta có 

 (thỏa mãn)

**Bài 12:** HSG Tân Uyên, năm học 2020 - 2021

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện 

Ta có 

 (thỏa mãn)

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất .

**Bài 13:** HSG Quỳnh Phụ, năm học 2020 - 2021

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện 

Phương trình 



 (thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình có tập nghiệm 

**Bài 14:** HSG Nga Sơn, năm học 2020 - 2021

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện 

Phương trình đã cho tương đương 

 (\*)

+ Nếu  thì phương trình 

 (thỏa mãn điều kiện)

+ Nếu  phương trình (\*) 





 (thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình có nghiệm là .

**Bài 15:** HSG Sin Hồ, năm học 2020 - 2021

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện 

Ta có 





Vì  với 





 (thỏa mãn)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm .

**Dạng 9: Phân tích thành dạng** 

Cách giải: Phương trình dạng 

Đặc biệt , ta có dạng 

**Bài 1:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện 

Ta có 



+)  thay vào thấy thỏa mãn.

+) 

Vậy  hoặc 

**Bài 2:** Chuyên Thái Bình, năm học 2013 - 2014

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện 

Ta có phương trình 







Vậy phương trình có nghiệm 

**Bài 3:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện: 

Phương trình 



 (thỏa mãn)

**Bài 4:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện: 

Phương trình 

 (thỏa mãn)

**Bài 5:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện 

Phương trình 



Phương trình (\*) vô nghiệm. Vì với  thì 

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất .

**Bài 6:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện 

Phương trình 



Vậy  là nghiệm duy nhất của phương trình.

**Bài 7:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện: 

Ta có 







Vậy  là nghiệm duy nhất của phương trình.

**Bài 8:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện: 

Ta có 



 (thỏa mãn)

**Bài 9:**

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện: 

Ta có 







Vậy  là nghiệm duy nhất của phương trình.

**Bài 10:** HSG Nam Từ Liêm, năm học 2020 - 2021

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện 

Vì 





Giải phương trình 

Bình phương hai vế ta được: 

 (thỏa mãn)

Vậy tập nghiệm của phương trình là 

**Bài 11:** HSG Ba Đình, năm học 2020 - 2021

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện 

Phương trình 



+ TH1: 

Đặt 

Phương trình đã cho có dạng 

Với 

+ TH2:  (thỏa mãn)

Vậy  là nghiệm của phương trình.

**Bài 12:** HSG Ba Đình, năm học 2020 - 2021

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện 

Phương trình đã cho tương đương với 





Với  thì 

Từ đó suy ra  là nghiệm duy nhất của phương trình.

**Bài 13:** HSG Thiệu Hóa, năm học 2020 - 2021

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện xác định 

Phương trình 



 (thoả mãn).

**Bài 14:** HSG Vĩnh Lộc, năm học 2020 - 2021

Giải phương trình sau 

**Lời giải**

Điều kiện xác định 

Phương trình 



 (thỏa mãn)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm .

**Bài 15:** HSG Tỉnh, Nghĩa Đàn, năm học 2020 - 2021

Giải phương trình sau  (\*)

**Lời giải**

Điều kiện 

Phương trình 





Nhận thấy 

 (thỏa mãn)

Vậy phương trình có nghiệm 

**Bài 16:** HSG Tỉnh Bắc Ninh, năm học 2019 - 2020

Giải phương trình sau  (\*)

**Lời giải**

Điều kiện 

Ta có 





Mặt khác trong điều kiện  thì 

Do đó  (thỏa mãn)

Vậy phương trình có nghiệm .

**Bài 17:** HSG Tỉnh Đà Nẵng, năm học 2020 - 2021

Tìm , biết 

**Lời giải**

Điều kiện 

Phương trình  (do  với mọi )



Xét phương trình 

Ta có  (2)

, do đó (2) không xảy ra

Vậy giá trị của  cần tìm là .

**Bài 17:** HSG Tỉnh Đà Nẵng, năm học 2020 - 2021

Giải phương trình 

**Lời giải**

Điều kiện 











Suy ra phương trình (\*) vô nghiệm

Vậy phương trình có nghiệm 

**Bài 18:** HSG Tỉnh Gia Lai, năm học 2020 - 2021

Giải phương trình 

**Lời giải**

Điều kiện 

Ta có 







Vậy phương trình có nghiệm duy nhất .

**Bài 19:** HSG Tỉnh Kon Tum, năm học 2020 - 2021

Giải phương trình 

**Lời giải**

Điều kiện 









 vì 

**Bài 20:** HSG Tỉnh Bắc Giang, năm học 2020 - 2021

Giải phương trình 

**Lời giải**

Phương trình 







+ 

+ 

Vậy tập nghiệm của phương trinh là .